講義実習資料 東京理科大学 教育実習生 石川 “TEXpert” 直太

次の、パラメーターkを含む方程式について考える。

$$x^2+y^2-x+8y-1+k(x^2+y^2+6x-3y+5)=0 \tag{1}$$

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(6k-1)x+(-3k+8)y+(5k-1)=0 \tag{2}$$

問題：この方程式はどのような図形を表わすか？

$k=-1$ の場合、

$$-7x+11y-6=0 \tag{3}$$

という方程式になり、これは直線を表わす。

$k\neq -1$ の場合、

$$x^2+y^2+\left(\frac{6k-1}{k+1}\right)x+\left(\frac{-3k+8}{k+1}\right)y+\frac{5k-1}{k+1}=0 \tag{4}$$

$$\left(x+\frac{6k-1}{2(k+1)}\right)^2+\left(y+\frac{-3k+8}{2(k+1)}\right)^2-\frac{25k^2-76k+69}{4(k+1)^2}=0 \tag{5}$$

という方程式になり、これは、中心

$$\left(-\frac{6k-1}{2(k+1)},-\frac{-3k+8}{2(k+1)}\right)$$

半径

$$\frac{1}{2\left|k+1\right|}\sqrt{25k^2-76k+69}$$

の円を表わす。

kを少しずつ変えながら、これらの方程式が表わす線を描いたものが、本紙裏面の図とリストである。なお、図の太い円は、次の方程式が表わす円である。

$$x^2+y^2-x+8y-1=0 \tag{6}$$

$$x^2+y^2+6x-3y+5=0 \tag{7}$$

問題：kを少しずつ変えて得られた図形には、どのような共通点があるか？

方程式 (6) と方程式 (7) の両方を満たすような (x,y) は、方程式(1) を必ず満たす。つまり、方程式 (6) で表わされる円と方程式 (7) で表わされる円の交点を、方程式(1) が表わす図形は必ず通る。

問題集13ページ 54 (2)

2円 $x^2+y^2-x+8y-1=0$、$x^2+y^2+6x-3y+5=0$ の 2 つの交点を通り、更に原点$(0,0)$ を通る円の方程式を求めよ。

解き方の方針

方程式 (1) が表わす図形は、$k=-1$ の場合を除いて、2 円の交点を通る円である。この円が原点を通るような、kの値を求めればよい。

まとめ

2個の方程式 $f(x,y)=0$ と $g(x,y)=0$ で表わされる 2 本の線(直線でも曲線でもよい) がある場合に、k を任意の実数とすると、方程式 $f(x,y)+kg(x,y)=0$ で表わされる線は、もとの 2 本の線の交点を通る。